Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

Mateusz Podmokły III rok Informatyka WI

semestr zimowy 2025

Spis treści

1 Podstawy rachunku prawdopodobieństwa

1.1 Przestrzeń probabilistyczna

Definicja 1.1.1. Przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Niepusty zbiór Ω wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego. Jego elementy to zdarzenia elementarne.

Definicja 1.1.2. σ-algebra zdarzeń.

Podrodzina Σ w rodzinie wszystkich podzbiorów Ω o następujących właściwościach:

1. $\Omega \in \Sigma$
2. Jeśli $A \in \Sigma$ to $A' = \Omega \setminus A \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

Jej elementy to zdarzenia losowe.

Własności zdarzeń:

1. $\emptyset \in \Sigma$
2. Jeśli $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$, to $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \in \Sigma$
3. Dla dowolnego ciągu $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$, zachodzi

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$$

4. Jeśli $A, B \in \Sigma$ to $A \setminus B \in \Sigma$

Określmy niezbędną terminologię:

$\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe

Ω – zdarzenie pewne

$A' = \Omega \setminus A$ – dopełnienie zdarzenia A

$A \cap B = \emptyset$ – zdarznia wzajemnie się wykluczają.

Definicja 1.1.3. Miara probabilistyczna (rozkład prawdopodobieństwa).

W przestrzeni Ω z σ-algebrą zdarzeń Σ dowolne odwzorowanie

$$P : \Sigma \to [0, 1]$$

spełniające warunki:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Dla dowolnego ciągu zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$ takiego, że $A_i \in \Sigma$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ zachodzi
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Własności prawdopodobieństwa:

1. $P(\emptyset)=0$
2. Jeśli skończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spełnia warunek
$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$
to
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$
3. Dla dowolnego zdarzenia A zachodzi
$$P(A') = 1 - P(A)$$
4. Dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzi
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
5. Jeśli $A \subset B$ to $P(A) \leqslant P(B)$
6. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą ciąg wstępujący, tzn.
$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$
to
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$
7. Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą ciąg zstępujący, tzn.
$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots$$
to
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i)$$

Definicja 1.1.4. Przestrzeń probabilistyczna.

Trójka (Ω, Σ, P), gdzie:

Ω – niepusty zbiór,

Σ – σ-algebra w Ω,

P – miara probabilistyczna.

Liczbę $P(A)$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A.

1.2 Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1.2.1. Prawdopodobieństwo warunkowe.

Liczba określona wzorem

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

gdzie

$A, B \subset \Omega$ – zdarzenia,

$P(B) > 0$.

Jest to prawdopodobieństwo A pod warunkiem B.

Definicja 1.2.2. Układ zupełny zdarzeń.

Skończony lub nieskończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$ jeśli zdarzenia w ciągu parami wzajemnie się wykluczają, tzn.

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

oraz zachodzi

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

Twierdzenie 1.2.1. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ tworzą układ zupełny oraz $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, to dla dowolnego zdarzenia B zachodzi

$$P(B) = \sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)$$

Twierdzenie 1.2.2. Twierdzenie Bayesa.

Jeśli zdarzenia A_i tworzą układ zupełny taki, że $P(A_i) > 0$ dla $i \in \mathbb{N}$, a B jest zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$, to dla dowolnego k zachodzi

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(B \mid A_k) P(A_k)}{\sum_i P(B \mid A_i) P(A_i)}$$

1.3 Niezależność zdarzeń

Definicja 1.3.1. Niezależność zdarzeń.

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi jeśli

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nazywamy niezależnymi jeśli dla każdego układu indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Definicja 1.3.2. Niezależność warunkowa.

Zdarzenia A i B są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli

$$P(A, B \mid C) = P(A \mid C) \cdot P(B \mid C)$$

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_k$ są warunkowo niezależne względem C dla $P(C) > 0$ jeśli dla każdego układu indeksów $i_1, i_2, \ldots, i_k$ oraz dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ zachodzi

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k} \mid C) = P(A_{i_1} \mid C) \cdot P(A_{i_2} \mid C) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k} \mid C)$$

2 Zmienne losowe jednowymiarowe

2.1 Zmienna losowa

Definicja 2.1.1. Zmienna losowa.

Zmienna losowa to odwzorowanie

$$X : \Omega \to \mathcal{X}$$

takie, że dla każdego $A \in \Sigma_{\mathcal{X}}$ zachodzi

$$X^{-1}(A) \in \Sigma$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{X}$ dowolnym niepustym zbiorem, a $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ-algebrą podzbiorów $\mathcal{X}$.

Definicja 2.1.2. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

Funkcję

$$P_X : \Sigma_{\mathcal{X}} \to [0, 1]$$

określoną następująco

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A))$$

gdzie (Ω, Σ, P) jest przestrzenią probabilistyczną, $\mathcal{X}$ niepustym zbiorem, $\Sigma_{\mathcal{X}}$ σ-algebrą w $\mathcal{X}$, a $X : \Omega \to \mathcal{X}$ zmienną losową.

Definicja 2.1.3. Dystrybuanta zmiennej losowej.

Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową rzeczywistą. Dystrybuantą zmiennej losowej rzeczywistej X nazywamy funkcję

$$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

określoną wzorem

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P_X((-\infty, x])$$

Definicja 2.1.4. Funkcja prawdopodobieństwa.

Rozkład dyskretny zmiennej X jest wyznaczony przez funkcję

$$p : \mathcal{S} \to [0, 1]$$

określoną następująco:

$$p(x_k) = P_X(x_k) = P(X = x_k)$$

Funkcję p nazywamy funkcją prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej X.

Definicja 2.1.5. Funkcja gęstości.

Gęstość zmiennej losowej X to funkcja

$$f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$$

taka, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ takich, że $a < b$ zachodzi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Definicja 2.1.6. Wartość oczekiwana.

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej rzeczywistej X nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\mu = \mu_X = E(X) = EX =$$

3 Literatura

[1] Smołka, M. (2025). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka. *Wykłady prowadzone na Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie.*